LE RAGIONI, E PROPORZIONI
GEOMETRICHE
TRATTATE COL METODO DELL' ANALISI, ED ANALOGAMENTE APPLICATE ALLA SOLUZIONE DE' PROBLEMI

DI A. SANTORO

DI MODUGNO

> Hunc rogo . . . . et legas, et emendes; eo magis quod nihil ante peraeque eodem stilo scripsisse videor.
>
> PLIN. lib. I epi. II.

NAPOLI

DALLA TIPOGRAFIA DI DOMENICO SANGIACOMO

Largo S. Giuseppe de' Ruffi num. 15.

1825.

AL CAVALIERE

D. GIUSEPPE DE CESARE

DELLA REALE SOCIETA' BORBONICA,
DELL' ACCADEMIA DELLA CRUSCA,
DELLA SOCIETA' PONTANIANA ec.

L' AUTORE

L'amicizia incomparabile, che Voi per me nudriste fin dalla mia infanzia, l' assistenza prestatami nella carriera di mia istruzione, i benefizj, che per quanto in Voi, era avete su di me, e sulla mia famiglia versati, sono tanti diritti, che Voi avete acquistati alla

dedica di questo mio primo, sebbene piccolo, scientifico lavoro.

Lo stimatore, e l' interprete di Dante, e di Vico, non debbe d' altronde considerare come fuori di sua sfera, un trattato sulle ragioni, e proporzioni, le quali, benchè portate in linguaggio matematico, pure sono sempre le basi del buon senso, e dell' ordine del pensiero.

PREFAZIONE.

Riunire in un brevissimo trattato ciò, che in diverse Aritmetiche si è detto circa la Teoria delle ragioni, e proporzioni Geometriche, legare le idee fra loro con analisi puramente matematica, esponendole sotto il più facile aspetto; dedurre alcune verità, le quali, perchè credute immediate conseguenze di altre, sono state omesse da diversi Autori, ma che i principianti non possono da se stessi scorgere; sono gli oggetti di questo opuscolo.

Esso non era fatto per veder la luce, ma solo per uso di un mio compagno e per dargli un attestato di affetto. Se non che persone autorevoli, che oltremodo stimo, e alle quali nulla son uso a rifiutare, avendomi incoraggiato e quasi direi costretto a darlo alle stampe, ho ceduto alle loro istanze, persuaso, che l' indulgente Lettore se non applaudirà al merito, applaudirà almeno alle intenzioni dell' Autore.

CAPITOLO I.

RAGIONI.

§. 1. La teoria delle Ragioni, e Proporzioni Geometriche (1), giustamente chiamata *importantissima* da Lacroix, ha per oggetto il paragone delle *grandezze omogenee*, ossiano di quelle, che sono di tal natura, che per uguagliarle tra loro basta accrescere la minore, o diminuire la maggiore competentemente.

Or la *ragione geometrica* non è, che il rapporto fra due grandezze omogenee, stabilito circa la continenza di una nell' altra; e quindi il quoziente, che si ha dalla divisione di due quantità fra loro, esprime il rapporto geometrico di esse. Così se dividendosi A per B si ha

(1) A rigore parlando l' epiteto di *Geometriche*, che si dà alle ragioni, e proporzioni, che trattiamo nel presente libro, non è molto esatto. Esse non sono meno aritmetiche di quelle, che vengono in Aritmetica chiamate esclusivamente con tal nome, e che altro non esprimono, che l' equi-differenza fra i numeri.

Al credere di qualche geometra le proporzioni per continenza hanno preso il nome di Geometriche dopo che Euclide formò il trattato delle proporzioni nel suo 5 libro, e che più giustamente chiamò geometriche, perchè trattate con delle linee. *Lagrange* volle rettificare un tal linguaggio nelle lezioni, che diede alla scuola normale, ma non fu molto seguito, ed io mi sono attenuto alla più comune denominazione.

un quoziente C, sarà C quella quantità che esprimerà il rapporto geometrico tra A e B.

§. 2. Da quanto si è detto deriva, che il rapporto geometrico non potrà stabilirsi esattamente, che fra grandezze *commensurabili* ossia fra quelle che possono essere misurate un egual numero di volte da una terza grandezza finita; mentre fra quelle; che non hanno per comune di loro misura una grandezza finita, chiamate perciò *incommensurabili*, il rapporto non potrà determinarsi che approssimativamente.

§. 3. Quella grandezza, che presa in se stessa un certo numero di volte ne forma un altra maggiore, dicesi *parte aliquota* di questa; mentre questa rispetto alla prima chiamasi *moltiplice*. Se poi più quantità sono egualmente misurate da una terza, si diranno *equimoltiplici* di essa; e le grandezze, le quali, presa ciascuna un egual numero di volte, formano altrettante eguali, si diranno *aliquote simili*.

§. 4. I Matematici hanno convenuto di disegnare il rapporto geometrico frapponendo fra le due grandezze, che si paragonano, due punti : tal che $A : B$ è l' espressione della ragione geometrica delle quantità A e B; delle quali la prima chiamasi *antecedente* e la seconda *conseguente* : C che dinota la continenza di una nell' altra, dicesi *esponente*, o *quantità* della ragione.

§. 5. Essendo dunque l' esponente di una ragione quello che ne dinota il valore, ne nasce che due ragioni, le quali avranno gli esponenti medesimi, si diranno ragioni eguali (1); che due ragioni, che sono rispettivamente eguali ad una terza, sono eguali tra loro, giacchè eguali riescono gli esponenti di esse, pareggiando ciascuno quello della terza, e che finalmente due rapporti eguali tali rimarranno se a ciascuno antecedente si aggiunge il proprio conseguente; venendo così ad aumentarsi egualmente il numero, che dinota la continenza delle due date ragioni eguali.

Per convenzione il segno di eguaglianza è il seguente =; tal che per esprimere che il rapporto di 12 a 6 pareggia quello di 10 a 5, si farà 12 : 6 = 10 : 5, e si pronunzierà 12 è a 6, come 10 è a 5.

§. 6. Da tuttocciò rilevasi, che una ragione geometrica puole rappresentarsi come una fra-

---

(1) Viene diversamente definita da Euclide l' eguaglianza delle ragioni geometriche. Egli le chiama eguali quando i rispettivi antecedenti moltiplicati egualmente per un numero qualunque sono insieme eguali maggiori, o minori dei rispettivi conseguenti, moltiplicate anche egualmente per un numero qualunque. Tal definizione però, come anche osservò Tacquet, lungi dal dinotare la natura delle ragioni eguali, non esprime che una delle di loro proprietà, mentre volendosi prendere la proprietà suddetta come il criterio dell' eguaglianza delle ragioni, avrebbe dovuto pria provarsi, che solamente alle ragioni eguali appartiene.

zione, il di cui numeratore è l' antecedente, ed il denominatore il conseguente (1); ciò che ci mena alla conoscenza di non alterarsi la quantità di una ragione se si moltiplica, o si divide sì l' uno che l' altro termine di esso per la medesima grandezza, come accade nei rotti.

Così sarà la ragione di $6 : 3 = 30 : 15 = 2 : 1$, giacchè il 6, ed il 3 si sono una volta moltiplicati ciascuno per 5, ed un altra ciascuno diviso per 3, restando in ambo i casi sempre 2 per quantità di ragione.

§. 7. Abbiasi la ragione di $A : B$, sarà la quantità di essa espressa da $\frac{A}{B}$. E perchè

$\frac{A}{B} = \frac{mA}{mB}$ sarà $A : B = mA : mB$.

Ora secondo che ad m si sostituirà il valore di un numero intero, o di un rotto, si avrà nel primo caso la ragione di $A : B$ eguale a quella degli equimoltiplici di ciascuna di esse grandezze, e nel secondo eguale a quella delle di loro aliquote simili; e quindi

» Due grandezze hanno tra loro una ragione » eguale a quella che serbano tra essi gli equi» moltiplici, o le aliquote simili rispeltive. »

§. 8. Poste le antecedenti cognizioni sull'

(1) È arbitrario il dividere l' antecedente pel conseguente, o viceversa; una volta però che si è adottato uno dei citati sistemi in un calcolo, deve sempre seguirsi lo stesso.

eguaglianza delle ragioni, è da osservarsi che se si ha

$$A : B = C : D,$$

e si ha inoltre

$$P : Q = R : S, \text{ sarà}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}, \text{ e } \frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$$

e quindi se $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$ si moltiplicano, o dividano ambo per $\frac{P}{Q}$, o per $\frac{R}{S}$, che gli è eguale, sarà nel primo caso

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{C}{D} \cdot \frac{R}{S}$$

e nel secondo

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{P}{Q}} = \frac{\frac{C}{D}}{\frac{R}{S}}$$

dal che risulteranno le due eguaglianze di rapporti

$$A \cdot P : B \cdot Q = C \cdot R : D \cdot S, \text{ e}$$

$$A \cdot Q : B \cdot P = C \cdot S : D \cdot R, \text{ ossia}$$

» Se due ragioni sono eguali tra loro, e si
» moltiplicano, o dividono termine a termine
» con altre due ragioni anche eguali tra loro,
» ne risulteranno due altre, che saranno tra
» loro benanche eguali. »

§. 9. È *semplice* quella ragione, che si ha paragonando due sole grandezze; ma se una ragione ha per quantità il prodotto degli esponenti di più ragioni semplici, questa si dirà *composta*; e sarà *duplicata*, *triplicata* ec. secondo che le ragioni semplici, che la compongono saranno due, tre ec.

Si è convenuto di segnare le ragioni componenti, chiudendo ciascuna di esse fra due parentesi, come si suole adoperare quando si vogliono esprimere più fattori di uno stesso prodotto. Così se la ragione di $M : N$ è composta dalle altre $A : B$, e $C : D$, si esprimerà l'eguaglianza tra essa, e le componenti nel modo seguente

$$M : N = (A : B)(C : D).$$

Ed in conseguenza se il rapporto, che esprimono le componenti $A : B$, e $C : D$ paregiasse quello, che deriva dalle altre $P : Q$, $R : S$, si dirà

$$(A : B)(C : D) = (P : Q)(R : S).$$

§. 10. Se nel paragonare due ragioni si osserva, che per quanto l'antecedente della prima contiene il suo conseguente, o è contenuto da esso, per altro tanto l'antecedente della seconda contiene il conseguente, che gli corrisponde, o è contenuto da esso; si diranno tali ragioni *dirette*; ma se poi l'antecedente della prima ragione contiene il proprio conseguente, o è da

esso contenuto, quanto il conseguente della seconda ragione contiene il suo antecedente, o è da esso contenuto, tali ragioni si diranno una *inversa* dell' altra.

Se poi l' antecedente di ciascuna ragione è eguale al rispettivo conseguente, le ragioni si dicono di *eguaglianza*.

Così, se nel paragonare il rapporto di $A : B$ a quello di $C : D$, si osserva, che per quanto A contiene B, o è da B contenuto, per tanto C contiene D, o è da D contenuto, sarà la ragione di A : B diretta di quella di $C : D$; ma se A contiene B, o è da B contenuta, quanto D contiene C, o è da C contenuta sarà $A : B$ come la inversa ragione di $C : D$.

E poicchè considerandosi D antecedente, e C conseguente ne risulta che il rapporto di continenza fra D, e C è come quello fra A, e B; perciò la ragione di $A : B$ diventerà diretta di quella di $C : D$ se si paragonerà D a C; val quanto dire

» Una ragione, che è inversa di un altra
» ne diviene diretta cambiando in essa l' antece-
» dente in conseguente, e 'l conseguente in an-
» tecedente. »

Quindi se in due ragioni eguali e dirette si cambierà l' antecedente in conseguente, e 'l conseguente in antecedente in ambo esse, tali ragioni, perchè hanno sofferte la medesima altera-

zione di rapporto fra i rispettivi di loro termini, rimarranno anche eguali e dirette, ciò che chiamasi *invertire*, come inappresso si vedrà.

§. 11. Rappresenti $M : N$ una ragione composta dalle semplici $A : B$, $C : D$, $E : F$, sarà, passando alle quantità rispettive

$$\frac{M}{N}=\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}\cdot\frac{E}{F} \text{ (§. 3)}$$

e quindi

$$M : N = A \,.\, C \,.\, E : B \,.\, D \,.\, F, \text{ ossia}$$

» Si avrà la composta da più ragioni sem-
» plici, paragonando di queste il prodotto di
» tutti gli antecedenti al prodotto di tutti i con-
» seguenti.

§. 12. Poicchè la ragione di $A : D$, fatta col paragonare le due estreme grandezze delle omogenee A, B, C, D, poste in un ordine qualunque, non si altera se tanto l' antecedente A, quanto il conseguente D si moltiplichi per la medesima grandezza $B \,.\, C$, sarà

$$A : D = A \,.\, B \,.\, C : D \,.\, B \,.\, C.$$

Ma considerando le grandezze A, B, C come antecedenti, e B, C, D come conseguenti, il prodotto delle prime, paragonato a quello delle seconde, esprime la ragion composta dalle semplici

$$A : B,\ B : C,\ C : D, \text{ (§. 11.)}$$

sarà perciò

$$A : D = (A : B)(B : C)(C : D),$$

ed in generale

» Se più grandezze omogenee sono poste in
» ordine qualunque, la ragione, che nasce dal
» paragonare la prima all'ultima di esse, è sem-
» pre eguale alla ragione composta dalle sem-
» plici, che si hanno paragonando la prima al-
» la seconda, la seconda alla terza ec., di tali
» grandezze. »

§. 13. Prendansi ora fra le grandezze A, B, C, D le ragioni coll' ordine seguente

$$A : B,\ C : D,\ B : C$$

per lo 11 paragrafo la composta da queste sarebbe rappresentata da

$$A . C . B : B . D . C;$$

ma si è veduto di sopra, che

$$A : D = A . B . C : D . B . C,$$

quando le ragioni si prendessero coll' ordine

$$A : B,\ B : C,\ C : D;$$

sarà dunque la ragione composta dalle prime

$$A : B,\ C : D,\ B : C,$$

espressa anche da $A : D$, dal che si ricava, che

» In qualunque ordine si prendano le ra-
» gioni fra date grandezze omogenee, si otterrà
» sempre la medesima ragion composta da esse. »

§. 14. Si è detto nel paragrafo 10, che la ragione di $A : B$ qualora è inversa di quella di $C : D$, diventa diretta paragonando $B : A$,

sarà per conseguenza in tal caso $C : D = B : A$.

Ma il valore del rapporto di $B : A$ è eguale $\frac{B}{A} = \frac{\frac{1}{A}}{\frac{1}{B}}$ sarà quindi anche $\frac{C}{D} = \frac{\frac{1}{A}}{\frac{1}{B}}$, ed in conseguenza

$$C : D = \frac{1}{A} : \frac{1}{B}$$

dal che ricavasi

» L' inverso rapporto di una data ragione, » diventerà diretto col paragonarsi tra loro i due » rotti, che si hanno dividendo l' unità una » volta per l' antecedente, ed un altra pel con» seguente di esso rapporto. »

§. 15. Da quanto abbiamo detto, ... che se la ragione di $M : N$ è composta dalla diretta di $A : B$, e dall' inversa di $C : D$, sarà

$$M : N = (A : B)(\frac{1}{C} : \frac{1}{D}) \text{, ossia}$$

$$M : N = A \cdot \frac{1}{C} : B \cdot \frac{1}{D} = \frac{A}{C} : \frac{B}{D}$$

ed in generale

» Si avrà il valore di una ragion composta » da due semplici, (una però inversa dell' al» tra), paragonando l' antecedente della diretta » diviso per l' antecedente dell' inversa, al con» seguente della prima, diviso pel conseguente » dell' ultima. »

§. 16. Abbiansi le ragioni $A : B$, e $C : D$, e siano inoltre le altre $E : F$, e $G : H$ rispettivamente inverse delle prime. Si ponga $A : B = K : L$, ed inoltre $C : D = L : M$, ne risulterà, che le grandezze K, L, M devono essere omogenee, e per conseguenza

$$K : M = (K : L)(L : M);$$

e sostituendosi le ragioni, alle quali le suddette componenti si sono supposte eguali, sarà

$$K : M = (A : B)(C : D).$$

Similmente pongasi $E : F = P : O$, ed inoltre $G : H = O : N$, sarà per la ragione assegnata per le antecedenti

$$P : N = (P : O)(O : N),$$

e quindi

$$P : N = (E : F)(G : H).$$

Ora essendo per supposizione la ragione $E : F$ inversa dell' altra $A : B$, sarà (§. 10) $A : B = F : E$; ma si è supposto $A : B = K : L$, sarà perciò $K : L = F : E$.

Intanto perchè $E : F = P : O$, sarà (§. 10) $F : E = O : P$, e sostituendo invece di $F : E$ la sua eguale $A : B$, ossia $K : L$, sarà

$$K : L = O : P.$$

Con raziocinio eguale si troverà essere

$$L : M = N : O,$$

e quindi moltiplicando queste due ultime eguaglianze di rapporti, sarà (§. 8)

$$K \cdot L : L \cdot M = O \cdot N : P \cdot O,$$

e prendendo di tali ragioni le rispettive quantità, sarà

$$\frac{K \cdot L}{M \cdot L} = \frac{O \cdot N}{O \cdot P}, \text{ ossia } \frac{K}{M} = \frac{N}{P},$$

e quindi $K : M = N : P$; ma si è trovato di sopra, che

$$K : M = (A : B)(C : D)$$

e che $N : P$ essendo inversa di $P : N$, sarà di quest' ultima anche inversa $K : M$; e perchè $K : M$ è eguale alla ragion composta dalle due $A : B$, e $C : D$; e $P : N$ è eguale alla composta dalle altre $E : F$, $G : H$, ne viene in conseguenza che

» La ragion composta da più semplici di-
» rette, è inversa della composta da altre, che
» sono ciascuna rispettivamente inverse delle
» prime componenti. »

§. 17. Proseguendo le nostre osservazioni sulle ragioni composte se ne prenda a considerare una, le di cui componenti siano

$$A : B, \; C : D, \; E : F, \; G : H,$$

delle quali la prima sia inversa della seconda, e propriamente $A : B = D : C$.

Pongasi poi $A : B = K : L$, e supponga si $K = M$; sarà per conseguenza

$$C : D = L : M.$$

Inoltre si facci

$$E : F = M : N, \text{ e } G : H = N : O;$$

sarà moltiplicando termini a termine queste ultime quattro eguaglianze di ragioni

$$A.C.E.G : B.D.F.H = K.L.M.N : L.M.N.O,$$

e passando alle quantità di tali ragioni sarà

$$\frac{A.C.E.G}{B.D.F.H} = \frac{K.L.M.N}{O.L.M.N}$$

ossia

$$\frac{A.C.E.G}{B.D.F.H} = \frac{K}{O}$$

dal che si avrà

$$A.C.E.G : B.D.F.H = K : O,$$

e pel paragrafo 11 sarà

$$K : O = (A : B)(C : D)(E : F)(G : H).$$

Con simile raziocinio si troverà essere

$$M : O = (E : F)(G : H),$$

e ciò considerando le due eguaglianze

$$E : F = M : N, \text{ e } G : H = N : O.$$

Ora essendosi supposto $M = K$, sarà

$M : O = K : O$, e sostituendo in queste due ragioni le composte che rispettivamente pareggiano, sarà

$$(A : B)(C : D)(E : F)(G : H) = (E : F)(G : H),$$

val quanto dire

» Se una ragion composta ha fra le sue
» componenti una che sia inversa di un' altra,
» tale composta rimarrà di egual valore se fra
» le sue ragioni componenti si sopprimono le
» due inverse. »

§. 18. Siano ora le quattro grandezze omogenee A, B, C, D, dalle quali si formano le due ragioni $A : B$, e $C : D$, componenti l' altra $M : N$, e si consideri la grandezza D frapposta fra le due A, e B, sarà (§. 12)

$$A : B = (A : D)(D : B).$$

Similmente supponendosi fra le grandezze C, e D interposta B sarà

$$C : D = (C : B)(B : D);$$

ed essendo

$$M : N = (A : B)(C : D),$$

se a queste due componenti si sostituiscono le altre, alle quali si sono trovate eguali, sarà

$$M : N = (A : D)(D : B)(C : B)(B : D).$$

Ora trovandosi fra queste ultime ragioni componenti le due $B : D$, e $D : B$, una inversa dell' altra, sarà per l' antecedente paragrafo

$$M : N=(A : D)(C : B) \text{, cioè}$$

» Se in due ragioni, che compongono una
» terza si cambiano tra loro gli antecedenti, o
» i conseguenti, (che vale lo stesso), la com-
» posta rimarrà la medesima. »

§. 19. Ed in fine suppongasi che le ragioni $A : B$, $C : D$, $E : F$, siano eguali alle altre rispettivamente $P : Q$, $R : S$, $T : U$, e si chiamino m, n, r gli esponenti delle prime, e c, q, l, quelli delle seconde, sarà per conseguenza $m . n . r$ la quantità della ragione composta dalle prime, e $c . q . l$ quella della composta dalle seconde; e perchè ciascuna delle prime ragioni è eguale rispettivamente a ciascuna delle seconde, sarà perciò ciascuno fattore del prodotto $m . n . r$ rispettivamente eguale a ciascun fattore di $c . q . l$, ossia $m . n . r = c . q . l$.

Con raziocinio eguale, e col supporre ciascuna delle prime ragioni rispettivamente maggiore o minore di ciascuna delle seconde, si verrà a trovare, che ciascun fattore del prodotto $m . n . r$ è rispettivamente maggiore o minore di ciascun fattore di $c . q . l$, ed in conseguenza $m . n . r$ maggiore o minore di $c . q . l$, il che suona, che

» Se più ragioni sono rispettivamente egua-
» li, maggiori o minori di altrettante ragioni,
» la composta dalle prime è benanche eguale
» maggiore o minore della composta dalle se-
» conde. »

§. 20. Se due serie di grandezze omogenee

$$A, B, C, D$$
$$E, F, G, H$$

sono tra esse in rapporti tali, che danno le seguenti ragioni eguali

$$A : B = E : F$$
$$B : C = F : G$$
$$C : D = G : H$$

tali serie si diranno essere in *ordinata ragione*; ma se in vece le accennate grandezze serbano i seguenti rapporti

$$A : B = G : H$$
$$B : C = F : G$$
$$C : D = E : F$$

le serie si diranno in *ragion perturbata*.

§. 21. Si considerino ora le grandezze omogenee A, B, C, D essere in ordinata, o perturbata ragione colle altre

$$E, F, G, H$$

sarà nella prima serie (§. 12)

$$A : D = (A : B)(B : C)(C : D)$$

e nella seconda

$$E : H = (E : F)(F : G)(G : H).$$

Intanto essendo il numero delle prime ragioni componenti eguale a quello delle seconde, e verificandosi tanto nel caso, in cui le due citate serie fossero in ragion ordinata, quanto nell' altro in cui fussero in perturbata ragione, che ciascuna delle prime ragioni componenti pareggia ciascuna delle seconde, non cambiandosi in ciascuno de' due casi, che solamente di ordine; sarà perciò $A : D = E : H$; ed in generale

» Se due serie di grandezze omogenee sono
» tra esse in ordinata o perturbata ragione, è
» sempre la ragione, che ha la prima grandez-
» za della prima serie all' ultima della medesi-
» ma eguale all' altra, che serba la prima all'
» ultima grandezza della seconda serie. »

§. 22. Contemplinsi le serie

$$A, B, C, D$$
$$E, F, G, H$$

in ordinata ragione e si avrà

$$A : B = E : F.$$

Ed aggiungendo a ciascuno antecedente di tali ragioni eguali il proprio conseguente, sarà pel paragrafo 15.

$$A + B : B = E + F : F;$$

ma per la natura delle due cennate serie si ha

$$B : C = F : G,$$

dunque le altre due serie (§. 20.)

$$A+B,\ B,\ C$$
$$E+F,\ F,\ G$$

saranno tra esse in ordinata ragione; e quindi

$$A+B : C = E+F : G$$

(§. antecedente); e pel §. 5

$$A+B+C : C = E+F+G : G;$$

ma per supposizione dalle prime serie si ha

$$C : D = G : H;$$

dunque le grandezze

$$A+B+C,\ C,\ D$$
$$E+F+G,\ G,\ H$$

sono tra loro benanche in ragione ordinata, e quindi

$$A+B+C : D = E+F+G : H,$$

e per l'accennato §. 5 sarà

$$A+B+C+D : D = E+F+G+H : H,$$

dal che si ricava, che

» Se due serie di grandezze omogenee sono
» in ordinata ragione, avrà la somma di tutte le
» grandezze della prima serie all'ultima di esse
» un rapporto, che sarà eguale a quello, che
» la somma di tutte le grandezze della seconda
» serie vanta all'ultima delle medesime. »

CAPITOLO II.

PROPORZIONI.

§. 23. L' eguaglianza di due ragioni dicesi *proporzione* (1). Quindi ogni proporzione deve essere necessariamente composta di quattro termini.

Così supponendo la ragione $A : B$ essere eguale all' altra $C : D$, sarà $A : B = C : D$ una proporzione.

§. 24. Or siccome nelle proporzioni si contempla l' eguaglianza di due ragioni, e per conseguenza quella di due quantità, quando dalle ragioni si passa agli esponenti rispettivi, così è necessario darsi qui una breve idea dell' eguaglianza di due quantità, detta in Algebra *equazione*.

§. 25. L' equazioni sono di diverse specie; noi però senza entrare nel novero di esse, ci limiteremo a dare come per incidente pochissime idee generali, necessarie al bisogno, in cui sia-

(1) Occupati nell' antecedente capitolo delle ragioni abbiam dovuto esaminarle sotto tutti i rapporti, e per conseguenza anche nello stato di eguaglianza fra esse; ciò non ostante non è da confondersi l' oggetto del capitolo presente con quello del precedente, considerandosi in questo le proprietà, che hanno i quattro termini proporzionali per l' uso, che di esse si fa in matematica.

mo, considerando solamente l' equazioni, dette di primo grado.

Già accennammo nell' antecedente capitolo essere $=$ il segno di eguaglianza; ora si aggiunge, che due quantità eguali possono, in ciascuna di esse, contenere più termini, o grandezze, aggregate con i segni $+$ di somma, e $-$ di sottrazione, secondo le condizioni, che offrono i diversi casi, prendendo allora le due quantità eguali la denominazione di *membri* della equazione. Onde per esprimere; che $A+B-C$ è eguale ad $F-N+R$, si stabilirà l' equazione fra i due membri $A+B-C=F-N+R$.

§. 26. L' equazioni si adoperano massimamente nella risoluzione di quelle quistioni, che hanno per oggetto di determinare il valore delle quantità; indagando i valori delle quantità incognite per mezzo de' rapporti che per mezzo esse hanno colle cognite.

Sotto questo aspetto spesso accade, che dalle proporzioni si passa all' equazioni, quando si vuole con tale artifizio giungere allo scoprimento di qualche verità.

§. 27. La principale operazione che si fa sull' equazioni, senza distruggere l' esistenza di esse, è quella di passare un termine da un membro all' altro, apponendovi il segno opposto a quello che la quantità trasportata trovavasi di avere nel membro, ove esisteva; ser-

vendo ciò ad isolare la grandezza ignota, e della quale se ne cerca il valore.

Così volendosi nella equazione

$$A+B=C+D$$

isolare la quantità A si deve trasportare B all' altro membro, facèndosi

$$A=C-B+D.$$

Ciò è fondato sul seguente raziocinio: essendo $A+B$, e $C+D$ due quantità èguali, se da ambo si tolga la grandezza B i residui rimarranno eguali, e quindi sarà

$$A+B-B=C+D-B;$$

ma $B-B$ dà zero, resterà in conseguenza

$$A=C+D-B.$$

Simile riflessione ci porterà alla conoscenza, che volendosi nella equazione

$$A-B=C+D,$$

passare $-B$ dal primo al secondo membro, si dovrà fare $A=C+D+B$.

§. 28. Quanto si è detto nell' antecedente paragrafo applicato per la moltiplicazione, e divisione (1), fa conoscere che una equazione sussi-

(1) Colla moltiplicazione, e divisione si puole benanche intendere l' innalzamento a potenze, e la estrazione di radice non essendo queste due ultime operazioni, che un abbreviamento delle prime.

sterà semprecchè una qualunque operazione aritmetica verrà eseguita intieramente su ambo i membri di essa; e l' applicazione di tal principio, praticata nelle circostanze di doversi rintracciare il valore di una grandezza incognita, è il mezzo per ottenere l' intento.

In fatti abbiasi l' equazione

$$A-P+C=4P+B,$$

e si voglia cercare il valore di P, supponendosi noti i termini rimanenti. Conviene in primo luogo, per ciò eseguire, isolare in un membro tutt' i termini, che contengono l' incognita P, ciocchè (§. antecedente) si fa trasportando B dal secondo al primo membro, e $-P$ dal primo al secondo, e si avrà

$$A+C-B=4P-P,$$

e poicchè $4P-P$ da $3P$, sarà quindi

$$A+C-B=3P,$$

e dividendo ambo i membri per 3, sarà

$$\frac{A+C-B}{3}=\frac{3P}{3}=P \quad (1).$$

---

(1) Accade, che le quistioni offrono tal volta il caso di doversi trovare il valore di due o più grandezze. Allora sarà necessario avere tante condizioni, quante bastano a stabilire un numero di equazioni eguale a quello delle grandezze incognite, mentre non corrispondendo il numero delle equazioni a quello delle inco

§. 29. Premesse tali cose, e ripigliando l' oggetto, che ci siamo prefissi trattare nel presente opuscolo, è da conoscersi, che la proporzione puol essere *discreta*, o *continua*.

---

gnite, il problema si chiamerà *indeterminato*. La soluzione di tali equazioni si ottiene col mezzo della sostituzione, come si vede qui appresso. Vogliasi p. e. nelle seguenti equazioni

$$x + y - c = m + 2y$$

$$3y + c = x - r$$

trovare il valore di x, e di y; si comincerà dal ricavare da una di esse il valore di un incognita, che sostituito convenientemente nell' altra, se ne otterrà una terza la quale ne conterrà una sola incognita, ed in questa con le note regole si preverrà alla conoscenza del valore dell' incognita suddetta in termini tutti noti.

Così stabilito il primo valore, si otterrà l' altro sostituendo il primo in una delle date equazioni, in fatti.

Trovisi nella prima eqnazione il valore di x, è sarà

$$x = m + 2y - y + c = m + y + c,$$

e sostituendolo nella seconda, essa diventa

$$3y + c = m + y + c - r;$$

ossia

$$3y - y = m + c - c - r,$$

e riducendo

$$2y = m - r, \text{ ed } y = \frac{m - r}{2}$$

Avuto così y tutto in termini noti, si avrà x sostituendo il valore di y nella prima equazione debitamente ridotta, e sarà

$$x - c = m + \frac{m - r}{2} = \frac{2m + m - r}{2},$$

ed in fine

$$x = \frac{2c + 3m - r}{2}$$

Si avrà la prima quando i quattro termini, che la compongono sono tutti diversi fra loro; ma se il conseguente della prima ragione è antecedente della seconda in tal caso la proporzione si chiamerà continuata, ed il termine comune alle due ragioni eguali si dirà *medio proporzionale*.

§. 30. Sia $A : B = C : D$; poicchè prendendo le quantità di ciascuna di tali ragioni si ha $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ se si moltiplicano ambo tali termini eguali per BD, si avrà

$$\frac{A \cdot B \cdot D}{B} = \frac{C \cdot B \cdot D}{D}$$

ossia

$$A : D = C : B,$$

d' onde ricavasi, che

» In ogni proporzione il prodotto dei ter» mini estremi pareggia quello dei termini medj.»

La detta verità applicata alle proporzioni continue, qual sarebbe

$$A : B = B : C$$

da

$$A \cdot C = B^2,$$

e quindi

» In ogni proporzione continua il prodotto » dei termini estremi è eguale al quadrato del » termine medio. »

§. 31. Intanto avendosi i due prodotti eguali $P \cdot Q = R \cdot S$, e dividendosi ambo per $Q \cdot R$, essi danno

$$\frac{P \cdot Q}{R \cdot Q} = \frac{R \cdot S}{R \cdot Q}$$

ossia

$$\frac{P}{R} = \frac{S}{Q}$$

ed in conseguenza $P : R = S : Q$, ed in generale

» Due prodotti eguali, ciascuno composto di
» due fattori, si sciolgono in una proporzione,
» che ha per termini estremi i fattori di uno, e
» per medj quelli dell' altro. »

§. 32. Essendo proprietà di ogni proporzione, che il prodotto dei suoi termini estremi eguaglia quello dei medj, se il prodotto AB si scioglie nella proporzione $AB : A = B : 1$, essa darà $AB = A \cdot B$, ed in conseguenza

» Qualunque prodotto di due fattori sta ad
» uno di essi, come l' altro fattore all' unità. »

§. 33. Con la conoscenza delle precedenti cognizioni procediamo alla soluzione del seguente generale

PROBLEMA.

Dati tre termini di una proporzione conoscersi il valore del quarto.

Nella proporzione $A : B = C : D$, siano noti A, B, C fa d'uopo conoscersi D.

Prendansi le quantità delle antecedenti ragioni $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$, e si riducano ambe allo stesso denominatore, sarà

$$\frac{A \cdot D}{B \cdot D} = \frac{C \cdot B}{B \cdot D}$$

e per conseguenza $A \cdot D = C \cdot B$. Dividansi ora tali due quantità eguali per A, ne risulterà

$$D = \frac{C \cdot B}{A}.$$

§. 34. Dalla soluzione dell'antecedente problema ricavasi, che » il quarto termine di una » proporzione, è eguale al secondo moltiplicato » pel terzo, e diviso pel primo. »

Intanto se nella trovata equazione

$$D = \frac{C \cdot B}{A}$$

si trova con i metodi enunciati il valore di C, esso risulta come siegue

$$C = \frac{A \cdot D}{B}.$$

dal che si deduce, che

» Il terzo termine di una proporzione e

» eguale al primo moltiplicato pel quarto, e
» diviso pel secondo. »

Per la ricerca del primo, e secondo termine si adatteranno precisamente le regole, date pel terzo e quarto, mentre tali denominazioni non dipendono, che dall' ordine di precedenza col quale si vogliono scrivere le due ragioni eguali.

§. 35. Avendo riguardo a' quattro termini, che compongono una proporzione qualunque

$$A : B = C : D$$

si possono con essi ottenere cinque combinazioni come siegue

1. *Invertendo* $B : A = D : C$.
2. *Permutando* $A : C = B : D$.
3. *Componendo* $A + B : B = C + D : D$.
4. *Dividendo* $A - B : B = C - D : D$.
5. *Convertendo* $A : A \pm B = C : C \pm D$.

Andiamo ad esaminare quali effetti ciascuna di tali combinazioni apporta su di una proporzione. Assumendo sempre $A : B = C : D$, sarà (§. 30) $A \,.\, D = B \,.\, C$, e dividendo tali quantità eguali per A, sarà

$$D = \frac{B\,C}{A}$$

e divisi ambo questi termini per C, avrassi

$$\frac{B}{A} = \frac{D}{C},$$

ed in conseguenza $B : A = D : C$, dal che si deduce

» Se quattro termini sono proporzionali ,
» invertendoli rimarranno benanche proporzio-
» nali. »

Prendansi in oltre gli esponenti delle ragioni, che compongono la proporzione assunta , sarà

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

e moltiplicando il numeratore , ed il denominatore del primo rotto per C , si avrà

$$\frac{A\,C}{B\,C}=\frac{C}{D}$$

e moltiplicando per B il numeratore , e denominatore del secondo , si avrà

$$\frac{A\,C}{B\,C}=\frac{C\,B}{D\,B}.$$

Ora ambo i membri di questa equazione si dividino per $\frac{C}{B}$ ne risulterà $\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$, ed in conseguenza $A : C=B : D$, e quindi

» Quattro grandezze proporzionali permu-
» tandole rimarranno proporzionali. » (1)

---

(1) Qui è da osservarsi , che essendosi definito il rapporto geometrico essere quello , che si stabilisce , circa la di loro contienenza , fra grandezze omogenee , così nel caso , in cui i quattro termini della data proporzione non siano tutti della stessa natura , le ragioni permutate di $A : C$, e $B : D$ non sussisteranno , meno che trattandosi di numeri astratti , i quali , sotto tale rapporto , riescono tutti omogenei.

Riprendasi l' equazione $A.D = B.C$, ricavata dalla data proporzione, e si dividano ambo i membri per D, sarà $A = \frac{B\,C}{D}$. Se queste due quantità eguali si accrescono ognuna di B sarà $A + B = \frac{B\,C}{D} + B$, e moltiplicando ambo i membri per D, sarà

$$(A + B)D = B\,C + B\,D,$$

ossia

$$(A + B)D = (C + D)B$$

ed in conseguenza (§. 31)

$$A + B : B = C + D : D$$

d' onde rilevasi che

» Componendo i quattro termini di una » proporzione essi rimarranno proporzionali. »

Se nell' equazione avuta di sopra $A = \frac{BC}{D}$ si toglie da ambi i membri la quantità B, in vece di aggiungerla, come si è pratticato, seguendo lo stesso metodo di calcolo, si avrà

$$A - B : B = C - D : D,$$

e con ciò rimane stabilito, che

» Dividendo i quattro termini di una pro- » porzione, essi rimarranno proporzionali. »

Se finalmente invertansi i termini della proporzione

$$A-B : B=C-D : D,$$

sarà

$$B : A-B=D : C-D,$$

e componendo

$$B+A-B : A-B=D+C-D : C-D,$$

ossia

$$A : A-B=C : C-D,$$

Inoltre nella proporzione

$$A+B : B=C+D : D,$$

ricavata dalla terza combinazione, s' invertano i termini, e si avrà

$$B : A+B=D : C+D$$

e dividendo

$$B-(A+B) : A+B=D-(C+D) : C+D,$$

e pel §. 30 sarà

$$(C+D)[B-(A+B)]=(A+B)[D-(C+D)],$$

ossia

$$(C+D)(B-A-B)=(A+B)(D-C-D),$$

e riducendo

$$-(C+D)A=-(A+B)C,$$

e quindi

$$A(C+D)=C(A+B),$$

e sciogliendosi tali prodotti in proporzione, sarà pel §. 31

$$A : A+B=C : C+D;$$

ma poco fa si è trovato essere

$$A : A - B = C : C - D;$$

si avrà perciò

$$A : A \pm B = C : C \pm D,$$

dal che deducesi, che

» I quattro termini di una proporzione se si
» convertono rimarranno tuttavia proporzionali. »

§. 36. Si è detto nel paragrafo 30, che nelle proporzioni continue il prodotto de' termini estremi pareggia il quadrato del medio. Una tale verità applicata nella circostanza di volersi trovare il valore della media proporzionale fra due grandezze omogenee date A, e B che per comodo chiamo X, si avrà

$$X^2 = AB, \text{ ed } X = \sqrt{AB};$$

val quando dire

» La media proporzionale fra due grandez-
» ze omogenee viene rappresentata dalla radice
» quadrata del loro prodotto. »

§. 37. Poicchè nell' antecedente Capitolo si è definita la ragione geometrica come un rotto, il di cui numeratore è l' antecedente, ed il denominatore il conseguente, siamo perciò portati a fissare le nostre osservazioni su i numeri frazionarj, per quanto lo esigge il rapporto, sotto del quale li abbiamo considerati, ed assumiamo in prima i due rotti $\frac{m}{n}$, e $\frac{r}{n}$, i quali hanno lo stesso denominatore.

Si moltiplichi tanto il numeratore, che il denominatore del primo rotto per r, sarà $\frac{m}{n} = \frac{m\,r}{n\,r}$; ma (§. 32) si ha $\frac{mr}{rn} : \frac{r}{n} = \frac{m}{r} : 1$, ed essendo $\frac{m}{r} : 1 = m : r$, sarà in conseguenza $\frac{mr}{rn} : \frac{r}{n} = m : r$, e semplificando l'antecedente della prima ragione, sarà $\frac{m}{n} : \frac{r}{n} = m : r$, ciocchè mostra, che

» Due rotti dello stesso denominatore ser-
» bano tra loro una ragione, che è eguale alla
» diretta di quella, che fra essi hanno i nu-
» meratori rispettivi. »

Siano poi i rotti $\frac{a}{b}$, ed $\frac{a}{c}$ dello stesso numeratore, e si moltiplichi il numeratore, ed il denominatore del primo per c, sarà $\frac{a}{b} = \frac{a\,c}{b\,c}$, e poicchè $\frac{ac}{bc} : \frac{a}{c} = \frac{c}{b} : 1$, ed inoltre $\frac{c}{b} : 1 = c : b$, ne risulta $\frac{a\,c}{c\,b} : \frac{a}{c} = c : b$ e semplificando l'antecedente della prima ragione, si otterrà $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = c : b$, ossia

» Due rotti dello stesso numeratore sono
» tra loro in una ragione, che è eguale all' in-
» versa di quella, che tra essi serbano i rispetti-
» vi denominatori. »

Or poicchè nell' antecedente paragrafo si è veduto, che $\frac{m}{n} : \frac{r}{n} = m : r$, e chè $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = c : b$, sarà pel (§. 8)

$$\frac{a \, . \, m}{n \, . \, b} : \frac{a \, . \, r}{n \, . \, c} = c \, . \, m : b \, . \, r,$$

e dividendo l' antecedente, ed il conseguente della prima ragione per $\frac{a}{n}$, sarà

$$\frac{m}{b} : \frac{r}{c} = c \, . \, m : b \, . \, r;$$

ma considerandosi c ed m come antecedenti di due ragioni, e b ed r come conseguenti risulta

$$c\,m : b\,r = (c : b)(m : r);$$

così sostituendo alla prima ragione l' altra $\frac{m}{b} : \frac{r}{c}$, che gli è eguale, ne risulterà

$$\frac{m}{b} : \frac{r}{c} = (c : b)(m : r),$$

ossia

» Due rotti di diversi numeratori, e de-
» nominatori, sono tra loro nella ragione, che
» è composta dalla diretta de' primi, e dall'
» inversa de' secondi. »

§. 38. Riprendiamo la nosra generale pro-

porzione $A : B = C : D$, e si permutino i suoi termini, sarà

$$A : C = B : D,$$

ed invertendo

$$C : A = D : B.$$

Ora passando agli esponenti di quest' ultima, si avrà $\frac{C}{A} = \frac{D}{B}$, ed aggiungendo, o togliendo a ciascuna di tali quantità eguali una qualunque grandezza m, avrassi

$$\frac{C}{A} \pm m = \frac{D}{B} \pm m,$$

e fatta la debita riduzione d' interi e rotti sarà

$$\frac{C \pm mA}{A} = \frac{D \pm mB}{B},$$

il che dà la seguente proporzione

$$C \pm mA : A = D \pm mB : B,$$

nella quale, permutando i termini, risulterà

$$C \pm mA : D \pm mB = A : B,$$

e quindi

» In ogni proporzione il secondo anteceden-
» te più o meno il primo, preso un certo nu-
» mero di volte, sta al secondo conseguente più
» o meno il primo, preso anche un egual nu-
» mero di volte come qualunque degli antece-
» denti sta al rispettivo conseguente. »

Intanto se nell' ultima proporzione si suppone $m=1$, essa si cambia nella seguente

$$C \pm A : D \pm B = A : B,$$

ed in conseguenza

» La somma, o la differenza degli antece-
» denti sta alla somma, o differenza dei con-
» seguenti, come un' antecedente al rispettivo
» conseguente. »

§. 39. Poichè si è veduto nell' antecedente paragrafo, che

$$C \pm A : D \pm B = A : B,$$

tale proporzione si decompone nelle seguenti

$$C + A : D + B = A : B$$

$$C - A : D - B = A : B,$$

e perchè

$$A : B = A : B$$

sarà pure

$$C + A : D + B = C - A : D - B,$$

e permutando

$$C + A : C - A = D + B : D - B,$$

ossia

» In ogni proporzione la somma degli an-
» tecedenti è alla loro differenza, come la som-
» ma dei conseguenti alla differenza di essi. »

§. 40. Se nella proporzione

$$A : B = C : D$$

si suppone essere A il massimo dei termini, ne risulterà in conseguenza, che essendo maggiore di B, per legge di proporzione sarà C anche maggiore di D.

Ora nell' accennata proporzione si permutino i termini, ed essa si cambierà nell' altra

$$A : C = B : D;$$

e poicchè, giusta la supposizione, A è maggiore di C, sarà pure B maggiore di D.

Onde D essendo minore di C, e di B, risulta, che è il minimo de' termini.

Inoltre, essendo A il massimo, e D il minimo; si ponga

$$A - m = C, \text{ e } B - n = D$$

e poichè $A : B = C : D$, sarà, sostituendo a C ed a D i rispettivi valori

$$A : B = A - m : B - n,$$

e permutando $A : A - m = B : B - n$,

e convertendo $A : A - A + m = B : B - B + n$,

ossia $A : m = B : n$,

e permutando $A : B = m : n$; ma A è maggiore di B sarà pure m maggiore di n.

Intanto nella equazione $A - m = C$ si aggiunga al primo membro la grandezza D, ed al secondo l' altra $B - n$; e perchè si è posto

$$B - n = D,$$

sarà pure

$$A - m + D = B - n + C,$$

nella quale equazione accrescendo ciascun membro della grandezza m, essa diventa

$$A + D = B + C - n + m\ ;$$

ed essendosi poco fa provato, che m è maggiore di n, sarà per conseguenza $A + D$ maggiore di $B + C$, ed in generale

» Di quattro termini geometricamente pro-
» porzionali se il primo è il massimo, l'ultimo
» sarà il minimo; ed il primo e l'ultimo, pre-
» si insieme, risulteranno sempre maggiori della
» somma dei rimanenti. »

§. 41. Dall' idea data nel paragrafo 3 degli equimoltiplici, e delle aliquote simili, ne emerge, che esprimendo $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ gli esponenti della proporzione $A : B = C : D$, sarà pure

$$\frac{m A}{m B} = \frac{m C}{m D},$$

e quindi

$$m A : m B = m C : m D.$$

Ora secondo che alla lettera m si sostituirà un numero intiero, o rotto, si otterrà, generalmente parlando

» Essere proporzionali gli equimoltiplici, o
» le aliquote simili dei quattro termini di una
» proporzione. »

§. 42. Volgendo ora le nostre indagini sulle proporzioni continue; supponiamo, che le gran-

dezze omogenee A, B, C; D . . . siano tra loro continuamente proporzionali, cioè

$$A : B = B : C = C : D \text{ ec.};$$

tali grandezze formeranno tra loro una *progressione*, che i Matematici chiamano *Geometrica*.

Ora dalla oculare osservazione di questa specie di progressione, si vede, che all'infuori del primo ed ultimo termine, tutti gli altri sono vicedevolmente antecedenti, e conseguenti delle successive ragioni eguali, il di cui esponente conseguentemente è sempre lo stesso.

Intanto chiamando q la quantità della ragione di $A : B$, sarà $\frac{B}{A} = q$, e quindi $B = qA$;

sicchè sostituendo nella detta ragione tale valore di B, essa si cambierà in $A : qA$, espressione generale per dinotare qualunque rapporto geometrico, il cui secondo termine è sempre il primo moltiplicato per la quantità di ragione.

Quindi se i due primi termini di una progressione geometrica si esprimeranno con il rapporto $A : qA$, sarà il terzo termine rappresentato da q^2A, ossia dell'antecedente qA moltiplicato per la quantità di ragione q; il quarto da q^3A, ed in generale una progressione di numero n termini, sarà indicata da

$$A : qA : q^2A : q^3A \ldots q^{n-1}A$$ (1).

espressione generale di una progressione geometrica.

§. 43. Rappresenti $A : B : C : D : E$, una progressione geometrica, ed essendo per la natura di essa sempre la medesima la quantità di ragione fra due termini successivi, sarà perciò $A : B = D : E$, ed in conseguenza $A \cdot E = B \cdot D$, dal che si deduce, che

» In ogni progressione geometrica il pro-
» dotto dei termini estremi è sempre eguale a
» quello dei due termini equidistanti da essi. »

§. 44. Per l' andamento delle geometriche progressioni osservato nel §. 44 ciascun termine di esse è sempre il primo moltiplicato per l'esponente comune, elevato alla potenza, indicata dal numero, che esso termine occupa, meno un'unità. Se quindi rappresentiamo con u l' ultimo termine della progressione e con n il numero de'termini, risulterà, essere

$$u = A\, q^{n-1}.$$

In oltre chiamasi s la somma de' termini della nostra progressione, sarà precisamente

$$s = A + qA + q^2A + q^3A \ldots + A\, q^{n-1},$$

(1) I numeri 2, 3 . . . . n, posti all' apice della lettera q, esprime quante volte essa è presa in se stessa, detti in Algebra *esponenti*.

e quindi passando il primo termine del secondo membro di tale equazione al primo, sarà

$$s - A = q(A + qA + q^2A + q^{n-2}A);$$

ma

$$A + qA + q^2A \ldots + q^{n-2}A$$

esprime la intiera supposta progressione meno l' ultimo termine, perciò quest' ultima equazione puole cangiarsi nell' altra

$$s - A = q(s - u),$$

ossia

$$s - A = qs - qu,$$

ovvero

$$s(q - 1) = qu - A,$$

ed in fine

$$s = \frac{qu - A}{q - 1}.$$

Quindi

$$u = Aq^{n-1}$$

$$s = \frac{qu - A}{q - 1}$$

sono le due formole generali, delle quali, la prima esprime l' ultimo termine di una qualunque progressione geometrica di numero n termini, e la seconda la somma dei termini medesimi.

§. 45. È da osservarsi, che nelle progressioni geometriche cinque sono le grandezze, che

si considerano ; cioè primo termine , esponente comune , numero dei termini , ultimo di essi , e loro somma.

E poicchè con le due espressioni

$$u = A q^{n-1}$$

$$s = \frac{q u - A}{q - 1}$$

si hanno i mezzi di trovarne una delle accennate grandezze , qualora ne fossero note tre , così applicando , secondo il bisogno , una tale teorica, si giungerà alla soluzione dei diversi problemi , che si potranno proporre sull' oggetto , cosa , che all' Algebra si appartiene, e che noi tralasciamo perchè non è nell' oggetto di questa elementare operetta.

§. 46. Intanto per non lasciare come incompiuto questo cenno , dato sulle progressioni geometriche, ed anche perchè ci troviamo di aver premesse le necessarie cognizioni , diamo per termine del presente Capitolo la soluzione del seguente interessante

PROBLEMA.

Inserire fra r, e t un numero m di medj proporzionali.

Si sa , che ogni termine della progressione geometrica è eguale al primo moltiplicato pel

comune esponente, elevato alla potenza, indicata dal luogo, che esso termine occupa, meno un' unità; quindi la soluzione del nostro problema altro non esige, che trovare il valore di q nelle equazione

$$u = A\,q^{n-1}$$

nella quale essendo $A = r$, e $u = t$ come pure $n = m + 2$ essa diventa $t = r\,q^{m+1}$,

Ora procedendosi alla ricerca di q, esso si deduce dalla equazione accennata

$$t = r\,q^{m+1}, \text{ cioè } q = \sqrt[m+1]{\frac{t}{r}}.$$

Conosciuto così q, i medj proporzionali, che si vogliono inserire fra le date grandezze r e t, sono

$$r\sqrt[m+1]{\frac{t}{r}},\quad r\sqrt[m+1]{\frac{t^2}{r^2}},\quad r\sqrt[m+1]{\frac{t^3}{r^3}}\ \ldots\ldots$$

$$r\sqrt[m+1]{\frac{t^{m+1}}{r^{m+1}}},$$

e quindi

$$r,\ \sqrt[m+1]{t\,.\,r^m},\ \sqrt[m+1]{t^2 r^{m-1}},\ \sqrt[m+1]{t^3 r^{m-2}}\ \ldots\ t,$$

sarà la risultante progressione geometrica.

CAPITOLO III.

APPLICAZIONE DELLE PRECEDENTI TEORICHE ALLA SOLUZIONE DE' PROBLEMI SULLE QUANTITA' (1).

§. 47. Il principale uso, al quale è destinata la teorica delle proporzioni Geometriche, è quello della soluzione delle diverse quistioni di Aritmetica. Infatti quante diverse proporzioni si sono nell'antecedente Capitolo considerate, tante specie di problemi si sciolgono coll'ajuto di esse.

1. Colla proporzione semplice diretta si ottengono i risultati di quei problemi, che appartengono alla regola detta *del tre diretta*.

2. Con la proporzione semplice inversa si risolvono quelli della regola *del tre inversa*.

3. Applicando la ragione, composta da più semplici dirette, si perviene alla soluzione dei problemi chiamati della regola *del tre composta diretta*.

---

(1) Il presente Capitolo non offre un compiuto insegnamento per sciogliere qualsivoglia problema di Aritmetica, poichè altre cognizioni, e altri raziocinj vi abbisognerebbero; ma soltanto applica a degli esempj l'uso delle proporzioni geometriche, onde mettere in qualche pratica l'esposte teorie.

4. E se le componenti di una ragione composta contengono rapporti tali, fra i quali ve ne sia uno inverso dell' altro, tali proporzioni ci porteranno al risultato dei problemi, che diconsi appartenere alla regola *del tre composta inversa*.

5. E finalmente applicando i pochi cenni sull' equazione, dati nell' antecedente Capitolo, otterremo il modo di sciogliere quelle quistioni, che diconsi appartenere al primo grado.

§. 48. Generalmente parlando tutto lo studio, da pratticarsi nella soluzione de' diversi problemi, consiste particolarmente a saper stabilire i rapporti, o la proporzione, derivante dai dati della quistione, fissandone con precisione le condizioni; Quindi maneggiandosi opportunamente le regole, finora esposte, si arriverà alla conoscenza del valore delle quantità incognite, che per convenio si esprimeranno sempre con una delle lettere x, y, z.

Tutto ciò verrà con più precisione spiegato in trattarsi ciascuna delle accennate classe di problemi.

Regola del tre semplice-diretta.

§ 49. La regola del tre semplice-diretta scioglie tutte quelle quistioni, che dipendono da una proporzione, della quale tre termini sono cogniti, ed il quarto ignoto. Quindi, ricavate dai dati del problema le grandezze note, e dinotando con una delle tre accennate lettere quella, della quale si cerca il valore, si passerà a stabilire la proporzione, che menerà alla soluzione del problema.

Intanto perchè il rapporto non può stabilirsi, che fra grandezze omogènee, così dei tre termini noti, due devono essere indispensabilmente della medesima specie, ed il terzo di quella dell' ignoto.

Ora perchè i rapporti stabiliti nel modo suddetto, possono essere ambi tra loro in diretta ragione, o uno inverso dell' altro; così quei problemi, che offrono il primo caso, sono quelli, che in questa prima classe tratteremo, mentre i secondi saranno l' oggetto della seguente.

PROBLEMA.

Per la sussistenza di cento travagliatori si sono spesi in due mesi ducati mille, se gli o-

peraj fussero stati 74, quanto sarebbe importato il di loro mantenimento pel tempo medesimo?

Dalla esposizione del quesito si vede, che essendo cogniti i due diversi numeri di Operaj, cioè 100, e 74, non che la spesa portata per i primi in ducati 1000; non resta a conoscersi, che la spesa, che porterebbesi pei secondi. Il numero poi, che rappresenta il tempo, perchè comune ad ambi i numeri degli Operaj non si torrà in alcun conto.

Quindi dinotando per X la quantità, di cui si va in cerca, si avranno i quattro termini seguenti.

Numero de' primi Operaj 100
Numero de' secondi 74
Mantenimento pe' primi duc. . . . 1000
Idem pe' secondi X

Qui si osserva, che siccome per un maggior numero di Operaj fa d' uopo portare una spesa maggiore per la sussistenza di essi, così dee diminuirsi un tale esito qualora il numero degli Operaj fosse minore, perciò si ha che il rapporto fra i due numeri di travagliatori è direttamente come quello delle spese, e quindi
$100 : 74 = 1000 : X$, nella quale applicando la regola, data per invenire il valore del quarto termine, si avrà

$$X = \frac{74 \cdot 1000}{100} = \frac{74000}{100} = \frac{740}{1} = 740 \text{ ducati.}$$

ALTRO ESEMPIO.

Un corriere, spedito da Napoli a Castellammare, ha percorso sette miglia in due ore: caminando sempre con la medesima celerità in quanto tempo percorrerebbe l' intiero spazio di 18 miglia, che divide le due Città?

Raggionando come nell'antecedente quistione si vedrà, che la ragione delle miglia è come la diretta de' tempi, e per conseguenza si avrà

$$7 : 18 = 2 : X, \text{ e quindi}$$

$$X = \frac{18 \cdot 2}{7} = \frac{36}{7} = 5^{ore} + \frac{1}{7}.$$

SECONDA CLASSE.

Regola del tre semplice inversa.

§. 50. La distinsione fra questa classe, e l' antecedente, come si è detto, consiste nell' essere uno inverso dell' altro i due rapporti, che compongono la proporzione, che dal problema deriva; e quindi fissati i termini, che costituiscono tali rapporti, non resta a farsi, che mutare in diretta la inversa ragione con le regole ritrovate nel primo capitolo, ed operare come negli antecedenti esempj.

PROBLEMA.

In una piazza assediata si hanno le provi ste di viveri per un mese, e la razione per ciascun individuo corrisponde a 31 once : nella circostanza di dovere le istesse proviste bastare per 37 giorni, a quanto dovrebbe essere ridotta ciascuna razione ?

I dati quindi della quistione sono i seguenti

30. numero di giorni pe' quali si hanno le provviste.

37. quello pe' quali le provviste devono abbastare.

31. once di ciascuna primitiva razione.

X quelle, alle quali la razione dev' esser ridotta.

Si osservi, che il numero delle once per ciascuna razione deve diminuire a misura che cresce il numero dei giorni, pe' quali si vogliono far bastare le proviste ; val quanto dire, la ragione delle once delle razioni è inversa di quella de' numeri de' giorni, e sarà perciò $31 : X$ inversamente di $30 : 37$, e passando quindi alla diretta, sarà

$$X : 31 = 30 : 37 \text{, ed}$$

$$X = \frac{31 \cdot 30}{37} = \frac{930}{37} = 25^{once} + \frac{5}{37}$$

ALTRO ESEMPIO.

Per lo scavo di un fosso di due canne cube, eseguito da tre Zappatori, si sono impiegati due giorni: volendosi lo stesso fosso cavare in tre ore quanti Zappatori vi bisognano?

È facile il conoscersi, che nell' addotto esempio, diminuendosi il tempo, è necessario, che si accresca il numero de' Zappatori, e quindi la ragione dei tempi è inversa di quella dei travagliatori, ossia $24 : 3$ è inversa di $3 : X$, e per conseguenza sarà

$$3 : 24 = 3 : X, \text{ ed}$$

$$X = \frac{24 \cdot 3}{3} = 24 \text{ Zappatori}$$

§. 51. Dalla conoscenza delle due regole antecedenti se ne deduce un altra, detta di *società*. I problemi di questa classe non hanno altro oggetto, se non quello di dividere un dato numero in parti proporzionali ad altri numeri dati. Quindi noi ci accingeremo a sciogliere con caratteri generali una tale quistione, dalla quale ricaveremo le formole, applicabili a tutt'i diversi casi.

Sia a una grandezza, che si vuol dividere in due parti, le quali siano tra loro come $m : n$.

Chiamando x una di esse parti sarà $a - x$

l' altra, e per conseguenza per la condizione del problema dovrebbe essere

$$x : a-x = m : n,$$

e quindi

$$nx = am - mx,$$

ossia

$$(n+m)x = am,$$

ed in fine

$$x = \frac{am}{n+m}.$$

Trovato così il valore di x, ossia di una delle due parti, nelle quali a si vuol dividere, sarà facile l' invenire quello della seconda. In fatti sostituendo nella espressione $a-x$ il trovato valore di x, si avrà

$$a - \frac{am}{n+m} = \frac{an+am-am}{n+m} = \frac{an}{n+m}$$

valore dell' altra parte.

Volendosi poi dividere un numero in tre parti, le quali sieno tra loro come m, n, r, converrà, che si esprimano con x, ed y due di esse parti, e risulterà la terza essere $a-x-y$, e quindi per le condizioni del quesito, dovendo le due serie di grandezze m, n, r ed x, y, $a-x-y$ serbare tra loro una ragione

ordinata, si avranno le due seguenti proporzioni (§. 20)

$$m : n = x : y$$

$$n : r = y : a - x - y.$$

Ora trovando nella prima proporzione il valore di y, questo sarà

$y = \frac{n x}{m}$, e sostituendolo nella seconda, si avrà

$$\frac{n x}{m} : a - x - \frac{n x}{m} = n : r,$$

e per conseguenza sarà

$$\frac{n r x}{m} = a n - n x - \frac{n^2 x}{m}$$

ossia

$$\frac{n r x}{m} + \frac{n^2 x}{m} + n x = a n,$$

e quindi

$$x\left(\frac{n r}{m} + \frac{n^2}{m} + \frac{n m}{m}\right) = a n;$$

e finalmente si avrà

$$x = \frac{a n m}{n r + n^2 + n m} = \frac{a m}{r + n + m}.$$

Se il trovato valore di x si sostituisce nella equazione $y = \frac{n x}{m}$, sarà

$$y = \frac{n m a}{m(r + n + m)} = \frac{n a}{r + n + m}.$$

Ed in fine se nella espressione $a-x-y$ si sostituiscono i conosciuti valori di x ed y, si avrà $\frac{ar}{r+n+m}$, valore della terza parte, e

$$\frac{am}{r+n+m},\ \frac{an}{r+n+m},\ \frac{ar}{r+n+m}$$

saranno i tre valori proporzionali alle grandezze m, n, r, nelle quali si cerca dividere la quantità a.

Da quanto si è detto risulta, che

» Volendosi una grandezza dividere in par» ti proporzionali a numeri dati, verrà ciascu» na di esse rappresentata da un rotto vero, o » spurio, il quale ha per numeratore la data » grandezza moltiplicata corrispondentemente per » uno dei dati numeri, e per denominatore » comune ad esse parti, la somma di tutti i nu» meri dati. »

PROBLEMA.

Tre negozianti A, B, C hanno formato un capitale, mettendo A ducati 25 di sua porzione, B ducati 60, e C ducati 120: dopo un anno si è trovato il lucro comune in ducati 80, si domanda quanto del detto lucro spetta a ciascuno?

Qui si vede, che di altro non si tratta se

non di dividere il numero 80 proporzionatamente agli altri 25, 60, 120.

Quindi per adattare le trovate formole bisognerà fare

$$a = 80$$
$$m = 25$$
$$n = 60$$
$$r = 120$$

ed in conseguenza sarà

$$A = \frac{80 \cdot 25}{25 + 60 + 120} = 9^d + \frac{31}{41}$$

$$B = \frac{80 \cdot 60}{25 + 60 + 120} = 23^d + \frac{17}{41}$$

$$C = \frac{80 \cdot 120}{25 + 60 + 120} = 46^d + \frac{34}{41}$$

TERZA CLASSE.

Regola del 3 composta diretta.

§. 52. Quando le quistioni offrono molte condizioni, dalle quali si deduce, che il rapporto, che ha la quantità incognita all' altra della medesima specie, dipende dalle combinazioni di esse, allora la soluzione del quesito tiene ad una proporzione, fra le di cui ragioni avvene una composta da più semplici.

In tali casi è necessario, (ponderando tutte

le circostanze del problema), ben distinguere la ragion composta dalle componenti , non che la natura di ciascuna di esse , onde piantare la dovuta proporzione , che menerà al valore dell' incognite.

PROBLEMA.

500 ducati hanno fruttati in sei anni 240 ducati ; quanti ne produrrebbero 300 , impiegati alla medesima ragione de' primi , per lo spazio di sette mesi?

È da esservarsi , che l' utile , di cui si va in cerca , dipende dalla diversità delle somme impiegate , e dal vario tempo , pel quale il danaro è in commercio. E poicchè si sa , che supponendo sempre l'utile alla medesima ragione , e nel tempo istesso , maggior danaro impiegato da un guadagno maggiore ; come pure il medesimo danaro tenuto in commercio per maggior tempo , da maggior utile ; così si dirà , essere la ragione degli utili direttamente come quella , che deriva dalle due , che danno le diverse somme impiegate , ed il diverso tempo speso ; è perciò , riducendo gli anni a mesi , sarà

$$240 : x = (500 : 300)(72 : 7) ,$$

e riducendo si avrà (§. 11)

$$240 : x = 500 \,.\, 72 : 300 \,.\, 7 ,$$

ossia

$$240 \cdot 300 \cdot 7 = 500 \cdot 72 \cdot x,$$

ed in ultimo

$$x = \frac{240 \cdot 300 \cdot 7}{500 \cdot 72} = 14^{\text{ducati}}.$$

ALTRO.

Un viaggiatore caminando 8 ore al giorno ha percorso 90 miglia in tre giorni; quante miglia percorrerebbe in 5 giorni caminando 6 ore in ciascuno di essi.

I dati del problema sono

90 miglia
3 giorni
8 ore
5 giorni
6 ore

si cerca il numero delle miglia, che si dinoterà per x; e facendo le riflessioni come nell' antecedente esempio, si avrà

$$90 : x = (3 : 5)(8 : 6),$$

e quindi

$$90 : x = 24 : 30$$

ed in fin

$$x = \frac{90 \cdot 30}{24} = \frac{2700}{24} = 112^{\text{miglia}} + \frac{1}{2}$$

Regola del 3 composta inversa.

§. 53. Questa classe è quasi uniforme all' antecedente, dalla quale non differisce, che nella sola circostanza di trovarsi le componenti della ragion composta una inversa dell' altra.

In tal caso stabilita la debita proporzione con i raziocinj, praticati nella regola precedente, basterà cambiare, con uno degli assegnati metodi, in diretto l' inverso rapporto.

PROBLEMA.

Si sono impiegate 3 ore per tirare 60 tiri con 5 cannoni, in quante ore si tirerebbero 200 tiri con 9 cannoni?

Generalmente parlando, il tempo impiegato per un qualunque numero di tiri cresce a misura, che aumenta il numero dei medesimi, impiegandosi lo stesso numero di cannoni, ma s' impiega poi minor tempo se per lo stesso numero di colpi si adopera maggior numero di cannoni: ciocchè vale; la ragione dei tempi è diretta di quella dei tiri, ed inversa di quella dei numeri dei cannoni, ossia la ragione di $3 : x$ è come la diretta di $60 : 200$, e come l' inver-

sa di 5 : 9; e passando alla diretta, si otterrà

$$3 : x = (60 : 200)\left(\frac{1}{5} : \frac{1}{9}\right),$$

e quindi

$$\frac{x}{3} = \frac{200 \,.\, 5}{60 \,.\, 9}$$

ed in fine

$$x = \frac{3 \,.\, 200 \,.\, 5}{60 \,.\, 9} = \frac{300}{54} = 5 \text{ ore } \frac{5}{9}$$

ALTRO.

Un trinceramento lungo 500 passi è stato fatto in tre giorni da 100 operaj; quanti operaj vi abbisogneranno volendo costruire un trinceramento di 750 passi in 5 giorni?

Si vede chiaramente, che il numero degli operaj dati serba a quello, di cui si va in cerca una ragione, che è come la diretta di quella, che serbano tra loro le diverse lunghezze dei trinceramenti, e come la inversa dell' altra che hanno tra essi i diversi numeri di giorni, che vi s'impiegano, e quindi

$$100 : x = (500 : 750)(5 : 3), \text{ e}$$

$$100 : x = 500 \,.\, 5 : 750 \,.\, 3,$$

ed in fine

$$x = \frac{750 \,.\, 3 \,.\, 100}{500 \,.\, 5} = \frac{2250}{25} = 90 \text{ operaj}.$$

Problemi risoluti col mezzo dell' equazione di primo grado.

§. 54. In queste quistioni tutto lo studio consiste in ricavare dai dati del problema l' eguaglianza di due espressioni, fra i di cui termini ve ne sia uno, o più, che contenga la grandezza ignota: ciò stabilito, maneggiando le regole, date all' oggetto nel secondo capitolo, si otterrà il valore della cercata grandezza: tuttocciò si vedrà meglio nella soluzione del seguente

PROBLEMA.

Domandato il Priore di un Convento quanti Frati esistevano in esso, il Priore rispose: i Padri da Messa compongono un numero otto volte maggiore di quello de' Novizj, ma gli uni, e gli altri uniti insieme sono 36: quanti erano i Padri da Messa, quanti i Novizj?

Poicchè la somma del numero dei Padri da Messa, e di quello dei Novizj, presi insieme formar deve 36; chiamando x il numero dei secondi, sarà $8x$ quello dei Sacerdoti, e per conseguenza

$$8x + x = 36, \text{ e}$$

$$x(8+1)=36\,,$$

$$x=\frac{36}{9}=4^{\text{Novizj}}$$

Essendo dunque 4 i Novizj, per la condizione del problema i Padri da Messa sono 32.

ALTRO.

Un giocatore di carte nel principio del suo gioco, volgendosi ad un amico, che gli era vicino, gli disse, fa voti perchè io raddoppia il mio danaro, mentre ciò effettuandosi, io ti regalerò un carlino: raddoppiò in fatti, e diede all'amico la promessa. Replicò il giuocatore all' amico la medesima preghiera, e raddoppiò la seconda volta il danaro, che gli rimase dopo fatto il primo regalo, e gli diede un secondo egual premio. Finalmente per la terza volta fece la medesima preghiera, ebbe il giuocatore lo stesso intento, ed effettuì un terzo regalo a pro dell' amico, eguale a ciascuno de' due antecedenti; ma dopo ciò rimase senza un soldo, ad onta di aver per tre volte raddoppiato il danaro in gioco.

Quanto aveva il nostro giuocatore nel mettersi a giocare?

Dalle condizioni, che offre la quistione, si vede, che chiamando x il danaro, che il giuocatore aveva nel porsi a tavolino, sarebbe

$2x-10$ quello, che gli rimane dopo la prima vincita, e $2(2x-10)-10$ quello rimasto dopo la seconda, e finalmente $2(2(2x-10)-10)-10$ ciocchè conserverebbe dopo di aver raddoppiato per la terza volta il danaro in gioco, e dopo essersi per la terza volta dissobbligato con l' amico della promessa. E poicchè dopo ciò niun soldo gli rimase, dovrà essere per conseguenza

$$2(2(2x-10)-10)-10=0,$$

e riducendo tale espressione, sarà

$$8x-40-20-10=0,$$

e passando al secondo membro tutti i termini negativi, sarà

$$8x=40+20+10, \text{ ossia}$$

$$8x=70, \text{ ed in fine}$$

$$x=\frac{70}{8}=8^{gr.}+\frac{3}{4}.$$

ALTRO.

In quali istanti la lancetta dei minuti in un' orologio s'incontra con quella delle ore?

È noto a tutti, che nel mezzogiorno acade inevitabilmente uno di tali incontri: andiamo a rintracciare gli altri.

Supponghasi, che per effettuarsi il secondo incontro dopo quello di mezzogiorno, la lancetta delle ore deve percorrere uno spazio, che chiameremo x; sarà quindi $12.x$ quello che

percorrerà la lancetta dei minuti nel tempo istesso.

Ora $12x$ altro non esprime se non la circonferenza intera della sfera dell' orologio, più lo spazio percorso dall' indice delle ore fino al secondo incontro; e disegnandosi con C la circonferenza suddetta, si avrà la seguente equazione

$$12 \cdot x = C + x, \text{ e quindi}$$

$$x = \frac{C}{11}.$$

Intanto perchè l'intiera circonferenza si percorre dall' indice delle ore in dodici ore, sarà perciò $x = \frac{12}{11}$; val quanto dire il secondo incontro delle lancette avverrà dopo $\frac{12}{11}$ di un'ora; ed in generale tutti gl' incontri saranno rappresentati dai seguenti numeri

$$\begin{array}{c} \text{ore} \\ 1 + \frac{1}{11} \\ 2 + \frac{2}{11} \\ 3 + \frac{3}{11} \\ \vdots \\ 11 + \frac{11}{11} = 12^{\text{ore}}. \end{array}$$

Elenco delle verità, ritrovate, mercè le analisi fatte.

1. Due grandezze hanno tra loro una ragione eguale a quella, che serbano tra essi gli equimoltiplici, o le aliquote simili rispettive. *Pag. 10*, §. *7*.

2. Se due ragioni sono eguali tra loro, e si moltiplicano, o dividono termine a termine con altre due ragioni, anche uguali tra loro, ne risulteranno due altre, che saranno tra loro benanche eguali. *Pag. 11*, §. *8*.

3. Una ragione, che è inversa di un altra ne diviene diretta cambiando in essa l'antecedente in conseguente, e 'l conseguente in antecedente. *Pag. 13*, §. *10*.

4. Si avrà la composta da più ragioni semplici, paragonando di queste il prodotto di tutti gli antecedenti al prodotto di tutt' i conseguenti. *Pag. 14*, §. *11*.

5. Se più grandezze omogenee sono poste in ordine qualunque, la ragione che nasce dal paragonare la prima all' ultima di esse, è sempre eguale alla ragione composta dalle semplici, che si hanno paragonando la prima alla seconda, la seconda alla terza ec. di tali grandezze. *Pag. 15*, §. *12*.

6. In qualunque ordine si prendono le ragioni fra date grandezze omogenee, si otterrà sempre la medesima ragion composta da esse. *Pag. 15*, §. *13*.

7. L' inverso rapporto di una data ragione diventerà diretto col paragonarsi tra loro i due rotti, che si hanno dividendo l' unità una volta per l' antecedente, ed un' altra pel conseguente di esso rapporto. *Pag. 16, §. 14.*

8. Si avrà il valore di una ragion composta da due semplici, (una però inversa dell' altra), paragonando l' antecedente della diretta, diviso per l' antecedente dell' inversa, al conseguente della prima, diviso pel conseguente dell' ultima. *Pag. 16, §. 15.*

9. La ragione composta da più semplici dirette, è inversa della composta da altre, che sono, ciascuna rispettivamente, inverse delle prime componenti. *Pag. 18; §. 16.*

10. Se una ragione composta ha fra le sue componenti una di esse eguale all' inversa dell' altra, tale composta rimarrà di egual valore se fra le sue ragioni componenti si sopprimono le due inverse. *Pag. 20, §. 17.*

11. Se in due ragioni, che compongono una terza, si cambiano tra loro gli antecedenti, o i conseguenti, (che vale lo stesso), la composta rimarrà la medesima. *Pag. 21, §. 18.*

12. Se più ragioni sono rispettivamente eguali, maggiori, o minori di altrettante ragioni, la composta dalle prime è benanche eguale, maggiore, o minore della composta dalle seconde. *Pag. 22, §. 19.*

13. Se due serie di grandezze omogenee sono tra esse ordinata, o perturbata ragione, è

sempre la ragione, che ha la prima grandezza della prima serie all' ultima della medesima, eguale all' altra, che serba la prima all' ultima grandezza della seconda serie. *Pag.* 23, §. 21.

14. Se due serie di grandezze omogenee, sono in ordinata ragione, avrà la somma di tutte le grandezze della prima serie all' ultima di esse un rapporto, che sarà eguale a quello, che la somma di tutte le grandezze della seconda serie vanta all' ultima delle medesime. *Pag.* 24, §. 22.

15. In ogni proporzione il prodotto dei termini estremi pareggia quello dei termini medj. *Pag.* 30, §. 30.

16. In ogni proporzione continua il prodotto dei termini estremi è eguale al quadrato del termine medio *Pag.* 30, §. 30.

17. Due prodotti eguali, ciascuno composto di due fattori, si sciolgono in una proporzione, che ha per termini estremi i fattori di uno, e per medj quelli dell' altro. *Pag.* 31, §. 31.

18. Qualunque prodotto di due fattori stà ad uno di essi, come l' altro fattore all' unità. *Pag.* 31, §. 32.

19. Il quarto termine di una proporzione è eguale al secondo moltiplicato pel terzo, e diviso pel primo. *Pag.* 32, §. 33.

20. Il terzo termine di una proporzione è eguale al primo, moltiplicato pel quarto, e diviso pel secondo. *Pag.* 32, §. 34.

21. Se quattro termini sono proporziona-

li, invertendoli rimarranno benanche proporzionali. *Pag. 34*, *§. 35*.

22. Quattro grandezze proporzionali, permutandole rimarranno proporzionali. *Pag. 34*, *§.35*.

23. Componendo i quattro termini di una proporzione essi rimarranno proporzionali. *Pag. 35*, *§. 36*.

24. Dividendo i quattro termini di una proporzione rimarranno proporzionali. *Pag.35*, *§.35*.

25. I quattro termini di una proporzione se si convertono rimarranno tuttavia proporzionali. *Pag. 37*, *§. 35*.

26. La media proporzionale fra due grandezze omogenee vien rappresentata dalla radice quadrata del di loro prodotto. *Pag. 37*, *§. 36*.

27. Due rotti dello stesso denominatore serbano tra loro una ragione, che è eguale alla diretta di quella che fra essi hanno i numeratori rispettivi. *Pag. 38*, *§. 37*.

28. Due rotti dello stesso numeratore sono tra loro in una ragione, che è eguale all' inversa di quella, che tra essi serbano i rispettivi denominatori. *Pag. 38*, *§. 37*.

29. Due rotti di diversi numeratori, e denominatori sono tra loro nella ragione, che è composta dalla diretta dei primi, e dall' inversa dei secondi. *Pag. 39*, *§. 37*.

30. In ogni proporzione il secondo antecedente più o meno il primo, preso un certo numero di volte, sta al secondo conseguente più o meno preso anche uegual numero di volte, co-

me qualunque degli antecedenti al rispettivo conseguente. *Pag. 40*, *§. 38.*

31. La somma o la differenza degli antecedenti stà alla somma o differenza dei conseguenti, come un antecedente al rispettivo conseguente. *Pag. 41*, *§. 38.*

32. In ogni proporzione la somma degli antecedenti è alla di loro differenza, come la somma dei conseguenti alla differenza di essi. *Pag. 41*, *§. 39.*

33. Di quattro termini geometricamente proporzionali se il primo è il massimo, l' ultimo sarà il minimo, ed il primo e l' ultimo, presi insieme risulteranno sempre maggiori della somma de' rimanenti. *Pag. 43*, *§. 40.*

34. Sono proporzionali gli equimoltiplici, o le aliquote simili dei quattro termini di una proporzione. *Pag. 43*, *§. 41.*

35. In ogni progressione geometrica il prodotto dei termini estremi, è sempre eguale a quello dei due termini equidistanti da essi. *Pag. 45*, *§. 43.*

36. Volendosi dividere una grandezza in parti proporzionali a numeri dati, verrà ciascuna di esse rappresentata da un rotto vero o spurio il quale ha per numeratore la data grandezza, moltiplicata corrispondentemente per uno dei dati numeri, e per denominatore, comunque ad esse parti, la somma di tutti i numeri dati. *Pag. 58*, *§. 51.*

F I N E.

PRESIDENZA DELLA GIUNTA PER LA PUBBLICA ISTRUZIONE.

Vista la dimanda del Signor Domenico Sangiacomo, con la quale chiede di voler stampare un Opuscolo, che ha per titolo: *Le ragioni, e proporzioni Geometriche* ec. del Signor A. S. di Modugno.

Visto il favorevole parere del Regio Revisore P. D. Gaetano Monforte.

Si permette, che l'indicato Opuscolo si stampi, però non si pubblichi senza un secondo permesso, che non si darà se prima lo stesso Regio Revisore non avrà attestato di aver riconosciuta nel confronto uniforme la impressione all'Originale approvato.

Il Presidente
M. Colangelo.

Il Seg. Gen. e Mem. della Giunta
Loreto Apruzzese.

ERRORI.	CORREZIONI.
Dedica rig. 11 in Voi, era	in Voi era,
Pag. 14. *rig.* 7. §. 3.	§. 9.
Pag. 19. *rig.* 6. termini a	termine a
Pag. 25. *nota*: *rig. ultimo* matomatica	matematica
Pag. 26. *rig.* 13. che per mezzo esse	che esse
Pag. 30. *rig.* 14. $A : D = C : B$	$A . D = C . B$
Pag. 37. *rig.* 15. val quando	val quanto
Pag. 45. *rig.* 14. nel §. 44.	nel §. antecedente
Idem nota: esprime quante	esprimono quante
Pag. 49. *nota*: *rig. ultim.* teorie	teoriche
Pag. 50. *rig.* 3. proporzioni e	proporzioni ci
Pag. 67. *rig.* 5. ai secondo	al secondo